Mathematik und die Finanzmärkte

Markus Fulmek, Fakultät f. Mathematik
Univ. Wien

Kapitel 1

Einleitung

Bei weitem nicht alle Absolventinnen und Absolventen des Mathematik–Studiums finden ihr berufliches Fortkommen in Lehre und Forschung: Viele landen in EDV–nahen Bereichen, in der "klassischen Versicherungsmathematik" und (in Österreich eher beschränkt) in der Industriemathematik.

Daneben gibt es aber auch den Bereich der Banken und Kreditinstitute, in denen seit einigen Jahren mathematisches Know–How verstärkt nachgefragt wird. Diese Nachfrage resultiert aus der immer größer werdenden Bedeutung von

- Innovativen Finanzprodukten wie (exotischen) Optionen und strukturierten Anleihen,
- Messung und Management von verschiedenen Risken (Marktrisiko, Kreditrisiko) im Zusammenhang mit dem Bankgeschäft.

1.1 Finanzmathematik

Unter "Finanzmathematik" findet man zwei recht verschiedene Disziplinen:

- "Herkömmliche Finanzmathematik": Zinseszinsrechnung und versicherungsmathematische Modelle,
- "Moderne Finanzmathematik": Eine mathematische Teildisziplin, die durchaus anspruchsvoll ist und (unter anderem) Kenntnisse aus Maßtheorie, stochastischer Differential– und Integralrechnung sowie Funktionalanalysis voraussetzt.

In diesem Vortrag möchte ich einen elementaren Zugang zu den grundlegenden Konzepten der modernen Finanzmathematik präsentieren, ohne die mathematisch schwierigen Details zu behandeln (auch verschiedene "Komplikationen in der Praxis" lasse ich hier weg).

Kapitel 2

Zinskurve und Barwert

2.1 Der "Zeitwert" des Geldes: Diskontfaktoren

Wenn ich in genau t Jahren 1.000,– € brauche, dann kann ich dieses Geld (wenn ich es habe) schon heute auf die Seite legen. Im Normalfall werde ich es auf ein Konto oder Sparbuch bei einer Bank einzahlen. Dann wird aber (in aller Regel) schon ein geringerer Betrag N, $N <$1.000,– €, genügen, damit in t Jahren 1.000,– € verfügbar sind, denn die Bank bezahlt für mein Guthaben *Zinsen*.

In einem gewissen Sinn sind also die 1.000,– € in t Jahren heute nur N € wert: Man sagt, N ist der *Barwert* (*Present Value*) der 1.000,– € in t Jahren. Der Barwert hängt von der *Laufzeit* t und von den Zinsen ab; dieser Zusammenhang wird durch den sogenannten *Diskontfaktor* oder *Abzinsungsfaktor* $D(t)$ ausgedrückt:

$$N = 1.000,00 \times D(t).$$

Umgekehrt wären 1.000,– €, die ich heute für t Jahre auf der Bank anlege, in t Jahren

$$1.000,00 \times \frac{1}{D(t)}$$

"wert" (d.h., mein Guthaben "wächst in t Jahren auf diesen Wert verzinslich an"): Der *Aufzinsungsfaktor* ist also einfach der Kehrwert des Abzinsungsfaktors.

In der Praxis wird dieser einfache Sachverhalt aber anders ausgedrückt: Die Bank gibt in der Regel keine aktuellen Diskontfaktoren für alle möglichen Laufzeiten bekannt, sondern *Zinssätze*, die *annualisiert* (d.h., auf ein Jahr bezogen) sind und üblicherweise in Prozent angegeben werden.

Die (ganz elementare) "Umrechnung" von annualisierten Zinssätzen in Diskontfaktoren ist Gegenstand der *Zinseszinsrechnung*.

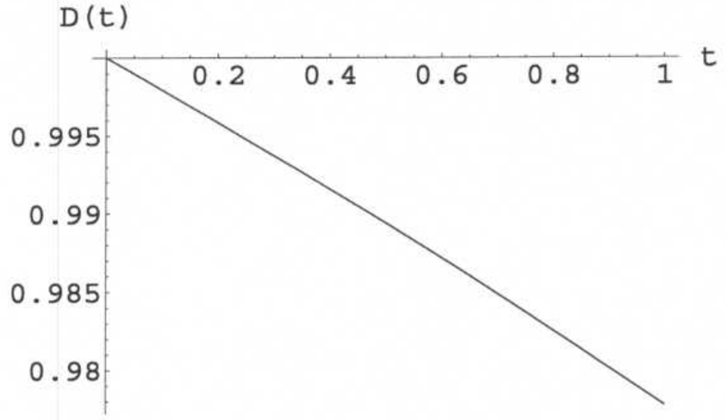


Abbildung 2.1: Diskontierungsfaktoren im €–Geldmarkt im Jahr 2004

2.2 Zinsenszinsrechnung

Betrachten wir das einfachste Beispiel dazu: Ein Guthaben G werde mit fixem jährlichem *Zinssatz* r auf *Laufzeit* n Jahre angelegt. Der Begriff *Zinseszins* bedeutet, daß die jährlich gezahlten Zinsen jeweils *weiterveranlagt* werden; das Guthaben wächst also im Ablauf der n Jahre folgendermaßen an:

0 Jahre	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	...	n Jahre
G	$G(1+r)$	$G(1+r)^2$	$G(1+r)^3$	...	$G(1+r)^n$

Wenn $G = 1.000,00$, $n = 5$ und $r = 4\%$, dann sieht das also so aus:

0 Jahre	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
1000,00	1040,00	1081,60	1124,86	1169,86	1216,65

2.2.1 Diskontfaktoren und Barwerte

Angenommen, das Guthaben ist "*täglich fällig*"; d.h., es kann *jederzeit* behoben werden, wie das z.B. bei einem einfachen Sparbuch der Fall ist: Was ist der richtige Diskontfaktor für eine Laufzeit von t Jahren, wenn $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist (z.B. ein halbes Jahr)?

Für Mathematiker ist die Sache natürlich sofort klar: Potenzen $(1+r)^t$ sind ja für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert, und zwar über die *Exponentialfunktion*:

$$(1+r)^t = e^{\log(1+r)t},$$

genauso muß also der *Diskontfaktor* (*discount factor*) für Laufzeit t lauten.

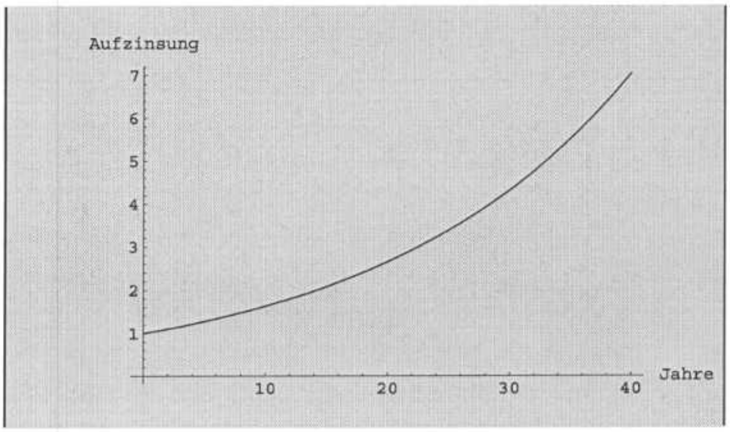


Abbildung 2.2: Aufzinsung bei Zinssatz 5% im Zeitablauf

Wenn man negative Laufzeiten betrachtet, also sozusagen in der Zeit rückwärts blickt (von dem Zeitpunkt in t Jahren zurück auf heute), erhält man den *Abzinsungsfaktor*

$$\frac{1}{(1+r)^t} = (1+r)^{-t} = e^{-t\cdot\log(1+r)}.$$

Mit Abzinsungsfaktoren ermittelt man den "heutigen Wert" (*Present Value*) von Zahlungen (*Cashflows*) in der Zukunft: Man nennt diesen Wert auch *Barwert*.

Diese einfache Art, Zinsen bzw. Diskontfaktoren zu berechnen, wird als *finanzmathematische Verzinsung* oder *stetige Verzinsung* (*continuous compounding*) bezeichnet.

Die einfachen Begriffe "Diskontierungsfaktoren und Barwerte" reichen im Prinzip schon aus, um die *Bewertung* (*pricing*) vieler "zinsgebundener Produkte" durchzuführen: Anleihen, Termingeschäfte und Swaps.

2.3 Zinskurve und Fristentransformation

Bis jetzt haben wir *einen* fixen Zinssatz betrachtet. Im allgemeinen ist der (jährliche) Zinssatz r aber *abhängig von der Laufzeit t*, denn für *feste* zeitliche Bindungen (d.h., das veranlagte Geld kann nicht ohne weiteres vor Ende der vereinbarten Laufzeit behoben werden) gelten in der Regel andere Zinssätze als für täglich fällige Gelder — der Zinssatz r ist also eine eine Funktion $r(t)$ der Laufzeit t.

Diese Funktion bezeichnet man als *Zinskurve* (*yield curve*, *term structure of interest rates*).

Zum Beispiel sah die Zinskurve im EURO im Jahr 2004 so aus wie in Abbildung 2.3.

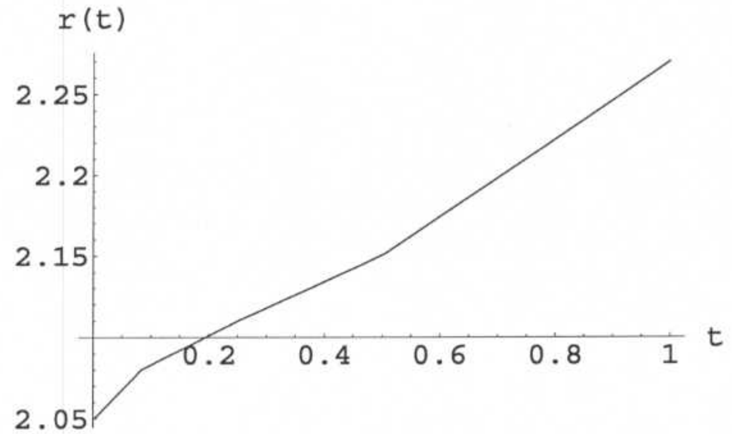


Abbildung 2.3: Zinskurve EURO (Geldmarkt)

2.3.1 Wie wird die Zinskurve bestimmt?

Eine naheliegende Frage ist natürlich: Wer legt die Zinskurve fest?

Im wesentlichen geschieht dies durch Angebot und Nachfrage auf den Zinsmärkten; dabei spielen die Zentralbanken (in Österreich die *Oesterreichische Nationalbank*, in Europa die *Europäische Zentralbank*) eine wichtige Rolle.

Dabei werden aber nicht etwa einfach Punkte auf der Zinskurve direkt festgelegt: Die Zinssätze für verschieden Laufzeiten ergeben sich "am kurzen Ende" (Zinsbindung ≤ 1 Jahr) durch den Interbankenhandel und "am langen Ende" (Zinsbindung > 1 Jahr) *implizit* durch die Marktwerte (Barwerte) von gehandelten (Staats–)Anleihen und Swaps.

Wenn man von "der Zinskurve" spricht, dann meint man damit meist die soeben skizzierte "Konstruktion" aus Interbankgeschäften und (Staats–)Anleihe–Preisen: Weil diese (in aller Regel) kein nennenswertes Ausfallsrisiko haben, nennt man dies auch die *risikolose Zinskurve.*

Die Werte der Zinskurve sind immer als *annualisierte* Zinsen zu verstehen, also umgerechnet auf ein Jahr, auch wenn die entsprechende Laufzeit eine ganz andre ist als ein Jahr.

Die Diskontfaktoren für Laufzeit t sehen einheitlich so aus: $(1+r(t))^{-t}$ — die Abbildung 2.1 zeigt die entsprechenden Faktoren; nochmal zur Erinnerung:

Das in Abbildung 2.3 erkennbare monoton steigende Verhalten der Zinskurve ist typisch (man spricht von einer *steilen Zinskurve*), aber keineswegs zwingend: Zinskurven können auch fallend sein; man spricht dann von einer *inversen Zinskurve.*

Bei einer steilen Zinskurve kann eine Bank ein langfristiges, hoch verzinstes Darlehen vergeben, das sie durch ständiges Neu–Ausborgen von kurzfristigen, niedrig verzinsten

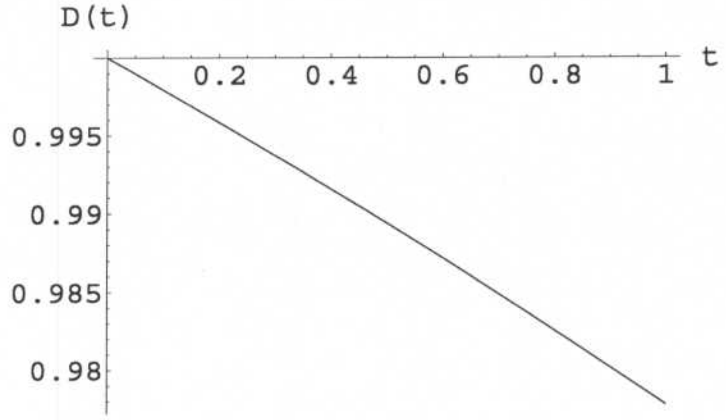


Abbildung 2.4: Diskontierungsfaktoren im €–Geldmarkt im Jahr 2004

Geldern *refinanziert*: Der sogenannte ***Strukturbeitrag*** bei einer solchen Ausleihung ist die Differenz zwischen den Zinsen der Ausleihung und den Refinanzierungszinsen; er ist umso größer, je steiler die Zinskurve ist.

Bei einer *flachen (odar gar konstanten) Zinskurve* fällt dieser Ertrag aus der sogenannten ***Fristentransformation*** weg — die Bank lebt dann nur noch vom ***Konditionenbeitrag***, das ist der Aufschlag, der dem Kunden verrechnet wird (d.h., wenn die Bank selbst Geld zu Zinssatz r ausborgen kann, verleiht sie es zu Zinssatz $r + \epsilon$ weiter an den Kunden).

Bemerkung 1 *Tatsächlich wurde die* Zinsmarge *in den letzten Jahren immer geringer — die Zinskurve wurde also flacher. In der Hoffnung auf zusätzliche Erträge gewinnt deshalb der Handel mit "neuen Produkten" (Derivate, Strukturierte Produkte etc.) an Bedeutung.*

*Dafür werden vermehrt quantitativ ausgebildete Leute gebraucht, die die damit verbundenen neuen Aufgaben (*Financial Engineering, Risikomanagement, Asset–Liability–Management*) bewältigen können.*

2.4 Zinsänderungsrisiko, Liquiditätsrisiko und Ausfallsrisiko

Die Fristentransformation sieht wie eine wundersame "Geldmaschine" aus (in der Vergangenheit war sie das auch teilweise): Sie ist aber keineswegs risikofrei!

Zinsänderungsrisiko: Die Zinsen sind ja keineswegs immer die gleichen; das Zinsänderungsrisiko besteht bei der Fristentransformation darin, daß die kurzfristigen Zinsen steigen und/oder die langfristigen Zinsen sinken und so den

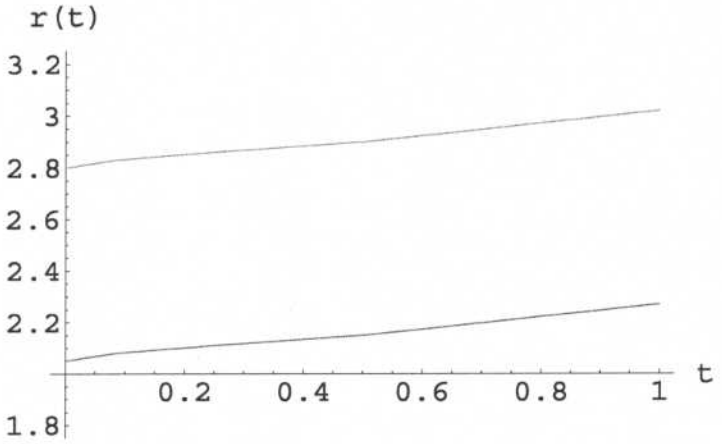


Abbildung 2.5: Credit Spread 75 Basispunkte auf EURO Geldmarkt

Ertrag aus der Fristentransformation in einen Verlust verwandeln (wenn die Zinskurve invers wird).

Liquiditätsrisiko: Auch wenn die Zinsen an sich unverändert bleiben, kann eine Situation eintreten, wo die Refinanzierung nicht oder nicht vollständig durchgeführt werden kann, weil nicht genügend *Liquidität* im Markt besteht (d.h. in unserem Beispiel, daß die Bank nicht genügend kurzfristiges Geld ausborgen kann).

Ausfallsrisiko: Schließlich können Darlehen "notleidend" bzw. "uneinbringlich" werden, sodaß sie schließlich "wertberichtigt" werden müssen. Diese beschönigenden Worte bedeuten: Der Schuldner (Kreditnehmer, Emittent einer Industrieanleihe) kann die aufgenommene Summe nicht mehr zurückzahlen; das *Kreditrisiko*, das die Bank trägt, ist also *schlagend geworden*.

2.4.1 Ausfallsrisiko und Credit Spread: Verschiedene Zinskurven

Betrachten wir hier insbesondere das Ausfallsrisiko (*Kreditrisiko*): Sehr häufig wird für risikobehaftete Ausleihungen einfach ein fester *Aufschlag* oder *Credit Spread* auf die risikolose Zinskurve gewählt. Dieser Aufschlag wird typischerweise in *Basispunkten* angegeben: Ein Basispunkt ist ein Hundertstel Prozent (also ein Zehntausendstel); 75 Basispunkten sind also 0.75 Prozent.

Die genaue Höhe des Aufschlags orientiert sich an der *Bonitätseinstufung* des Schuldners durch die Bank, oder am *Rating* (AAA, BB, ...) des Schuldners durch eine *Ratingagentur* (Moody's, Standard & Poors).

Abbildung 2.5 zeigt einen Aufschlag von 75 Basispunkten (grün) auf die risikolose EUR–Zinskurve (rot).

Selbst ein so einfaches Konzept wie Verzinsung wird also in der Praxis schnell komplizierter. Die tatsächlichen Diskontfaktoren hängen ab von

- dem Datum (die "*Zinslandschaft*" verändert sich mit der Zeit),
- der Laufzeit (die Zinskurve beschreibt den Zusammenhang zwischen Laufzeit und Zinssatz),
- der Bonität des Schuldners (de facto gibt es für verschiedene Bonitätsstufen verschiedene Zinskurven),
- der Währung (Zinsen im CHF sind anders als im EURO — darum sind ja auch *Fremdwährungskredite* so beliebt),
- dem Volumen (der Zinssatz kann auch von der Höhe der Einlage abhängen, eine Art "Rabatt–Staffelung"),
- und letztlich: Dem Verhandlungsgeschick des Kreditwerbers!

Kapitel 3

No–Arbitrage–Prinzip

Unter einem *Arbitrage–Geschäft* versteht man ein (meist "komplexeres") Geschäft, das ohne Risiko (und mehr oder weniger ohne Arbeit und Kapitaleinsatz) einen Gewinn abwirft.

Das einfachste Beispiel dafür ist die sogenannte *Platz–Arbitrage*: Wenn ein und dasselbe Wertpapier an zwei verschiedenen Börseplätzen A und B zu verschiedenen Preisen gehandelt wird, also etwa

$$P_A > P_B,$$

dann kann ein findiger Investor n Papiere in B kaufen, sofort nach A bringen und dort verkaufen — der risikolose Gewinn ist dann

$$n(P_A - P_B).$$

3.1 No–Arbitrage–Prinzip

Leider existieren solche Arbitrage–Möglichkeiten in entwickelten Märkten nur sehr begrenzt, und zwar aus einem "ökonomischen" Grund: In unserem Beispiel wird ja gerade durch das Ausnützen der Arbitrage–Möglichkeit am Börseplatz B die Nachfrage erhöht (und dadurch auch tendenziell der Preis), während am Börseplatz A das Angebot erhöht wird (und dadurch der Preis tendenziell gesenkt): Insgesamt verschwindet also die Preisdifferenz rasch.

In der Praxis werden freilich die Transaktionskosten nicht Null sein; außerdem ist die Sache mit einem gewissen Risiko behaftet (beim Transport könnten die Papiere verloren gehen) — die "No–Arbitrage–Bedingung" wird daher nicht

$$P_A = P_B$$

lauten, sondern eigentlich

$$|P_A - P_B| \leq \text{Transaktionskosten} + \text{Versicherung}.$$

In finanzmathematischen Überlegungen ist es jedenfalls ein ebenso einfaches wie häufig benütztes Grundprinzip: Wirtschaftlich idente Güter müssen denselben Preis haben, denn sonst gäbe es *Arbitrage–Gewinne*, also Gewinne ohne Kapitaleinsatz und ohne Risiko.

In unserem Fall war "wirtschaftliche Identität" offensichtlich — es ging ja um dasselbe Wertpapier.

3.2 Termingeschäfte (Forward Contracts)

Der Inhalt eines *Terminkontrakts* ist der Kauf bzw. Verkauf eines Finanzinstruments *auf Termin*; d.h.

- zu einem festgelegten Zeitpunkt in der Zukunft,
- zu einem im voraus bestimmten Preis (*Terminkurs*, *Forward Price*).

Das dem Kontrakt zugrundeliegende Finanzinstrument nennt man *Underlying*.

Termingeschäfte können sich auf alle möglichen Underlyings beziehen: Rohstoffe, Devisen, Zinsen, Aktien, etc.

Bemerkung 2 *Um den wirtschaftlichen Hintergrund eines Termingeschäftes zu verstehen, betrachten wir einen typischen Fall:*

Ein Produzent hat einen Auftrag aus dem Ausland und erwartet dementsprechend eine Zahlung in fremder Währung zu einem bestimmten Termin. Zur selben Zeit wird auch eine Darlehensrückzahlung (in heimischer Währung) fällig, die bei den derzeitigen *Wechselkursen durch die erwartete Zahlung gedeckt wäre.*

*Das kann sich aber schnell ändern (*Wechselkursrisiko*): Um nicht in Liquiditätsschwierigkeiten zu kommen, ist der Produzent interessiert, den zukünftigen Deviseneingang gegen die heimische Währung kursmäßig abzusichern (zu* hedgen*), also gewissermaßen den derzeitigen Wechselkurs für die zukünftige Transaktion "einzufrieren".*

3.2.1 Zinstermingeschäft: Forward Rate Agreement (FRA)

Ein wichtiger Typ von Termingeschäften sind die sogenannten *Forward Rate Agreements* (*FRAs*); das sind Terminkontrakte, deren Inhalt zukünftige Ausleihungen zu einem vorher festgelegten Zinssatz sind.

Am einfachsten kann man sich das als fix verzinste Anleihe vorstellen, die auf Termin verkauft wird: Der Kontrakt besteht also darin, daß der "Verkäufer"

- zum Termin T eine Zahlung erhält,
- die er nach Ablauf der Laufzeit L (also zum Termin $T + L$) samt Zinsen zurückzahlt.

Der fixierte Terminkurs (die ***Forward Rate***) ist hier der Zinssatz .

Wenn man richtig hinsieht, dann besteht ein FRA also aus zwei Zahlungen zu unterschiedlichen Zeiten (sei $\hat{r}$ der vereinbarte Terminzinssatz) — aus Sicht des Käufers:

- zum Zeitpunkt T Zahlung $\quad -(1+\hat{r})^{-L} N$,
- zum Zeitpunkt $T + L$ Zahlung $\quad N$;

mit den Barwerten (bei Zinskurve $r(t)$)

- $-(1+r(T))^{-T} \times (1+\hat{r})^{-L} N$,
- $(1+r(T+L))^{-T-L} \times N$.

Da das FRA ***wirtschaftlich ident*** ist zu den beiden einzelnen Cashflows, muß es nach dem No–Arbitrage–Prinzip auch denselben Preis haben:

$$N\left(-\mathbf{e}^{-T\log(1+r(T))-L\log(1+\hat{r})}+\mathbf{e}^{-(T+L)\log(1+r(T+L))}\right).$$

In der Praxis wird der Terminzinssatz $\hat{r}$ meist so bestimmt, daß dieser Preis am Beginn des Geschäftes 0 ist, d.h.:

$$\log(1+\hat{r}) = \frac{(T+L)\log(1+r(T+L)) - T\log(1+r(T))}{L}.$$

Der so definierte Zinssatz heißt ***Forward–Satz*** oder ***Forward–Rate*** (von T auf $T + L$).

3.2.1.1 Forward–Zinskurve

Die sogenannte *Forward–Zinskurve* (*Forward–Yield–Curve*) besteht aus den eben berechneten Forward–Rates für eine fixe Laufzeit L in Abhängigkeit von den verschiedenen Terminen T und hat eine interessante Interpretation: In einem gewissen Sinn beschreibt sie die *Markterwartung* für zukünftige Zinssätze (Wie wird der 3–Monatszins in einem Jahr sein? – Aus heutiger Sicht genau gleich der entsprechenden Forward–Rate “12 auf 15 Monate”!)

Diese Sichtweise kommt bei der Bewertung von speziellen variabel verzinsten Anleihen (*Constant–Maturity–Bonds*, *SMR–Bonds*) zur Anwendung.

Bemerkung 3 *Termingeschäfte sind auf alle möglichen Underlyings "anwendbar", denen ein wohldefinierter Wert zugewiesen werden kann; es ist nicht notwendig, daß das Underlying tatsächlich ge– und verkauft werden kann!*

Ein wichtiges Beispiel sind Index–Futures, *deren Underlying ein Aktienindex ist. Weil man einen Aktienindex nicht physisch liefern kann, werden solche Kontrakte in Bargeld abgewickelt (*Cash Settlement*), d.h., es finden Zahlungen statt, die der Differenz zwischen dem fixierten Indexniveau und dem tatsächlichen Indexniveau bei Fälligkeit entsprechen.*

Auch solche nach reinem Glückspiel aussehenden Konstruktionen haben aber in der Regel einen wirtschaftlichen Hintergrund: So kann etwa der Wert eines Portfolios aus österreichischen Aktien "im Durchschnitt" mit einem ATX–Future *abgesichert (gehedgt) werden. Die Idee dabei ist, daß die Wertschwankungen des Portfolios "in etwa" gleich sind wie die Wertschwankungen des Aktienindex.*

Kapitel 4

Optionsbewertung im Binomialmodell

Während bei einem Termingeschäft beide Vertragspartner gleichermaßen Rechte und Pflichten haben und demselben Kursrisiko ausgesetzt sind, ist das Risiko bei Optionen asymmetrisch verteilt: Der Käufer der Option erwirbt eine Art "Versicherung", die ihn zu nichts weiter verpflichtet als zur Bezahlung der Prämie; während der Verkäufer ein (möglicherweise unbegrenztes) Verlustrisiko trägt.

4.1 Europäische Optionen

Die einfachsten Beispiele sind *Europäische Optionen*:

Bei einer *Call–Option* erwirbt der Käufer das Recht (nicht aber die Pflicht!), zu einem festen Zeitpunkt T (*Fälligkeit* oder *Expiry*) in der Zukunft ein Underlying (Aktien, Rohstoffe, Bonds, Indices, etc.) zu einem festgesetzten *Strike–Preis* zu *kaufen*: Dieses Recht wird klarerweise nur dann ausgeübt werden, wenn der tatsächliche Preis des Underlying bei Fälligkeit größer ist als der Strike–Preis; die *Payoff–Funktion* (Auszahlungsfunktion) oder einfach *Payoff* in Abhängigkeit vom tatsächlichen Preis am Fälligkeitstag ist also gegeben als

$$\text{Call–Payoff} = \max(0, \text{Preis bei Fälligkeit} - \text{Strike–Preis}).$$

Siehe dazu Abbildung 4.1.

Bei einer *Put–Option* erwirbt der Käufer das Recht (nicht aber die Pflicht!), zu einem festen Zeitpunkt T in der Zukunft ein Underlying (Aktien, Rohstoffe, Bonds, Indices, etc.) zu einem festgesetzten Strike–Preis zu *verkaufen*:

$$\text{Put–Payoff} = \max(0, \text{Strike–Preis} - \text{Preis bei Fälligkeit}).$$

Siehe dazu Abbildung 4.2.

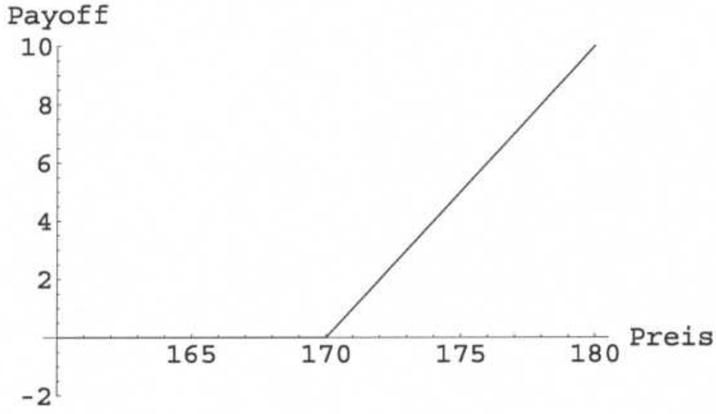


Abbildung 4.1: Payoff–Funktion einer Call–Option, Strike 170

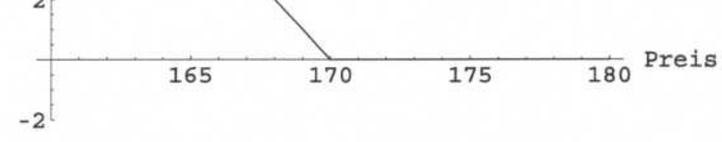


Abbildung 4.2: Payoff–Funktion einer Put–Option, Strike 170

4.2 Risikoneutrale Bewertung im Binomialmodell: Delta–Hedging als "Grundlegung" der Black–Merton–Scholes–Differentialgleichung

Eine interessante Ableitung aus dem *No–Arbitrage–Prinzip* ist die *risikoneutrale Bewertung* von Derivaten. Den Grundgedanken dabei werden wir zunächst im Diskreten darstellen: Die "kontinuierliche Version" davon führt dann (mit einigen Zwischenschritten aus der stochastischen Differentialrechnung) auf die *Black–Merton–Scholes–Differentialgleichung*.

4.2.1 Einstufiges Binomialmodell, exemplarisch

Betrachten wir zunächst ein ganz stark vereinfachtes Beispiel: Eine Aktie habe heute den Preis 200€, und die einzigen möglichen Preise in 3 Monaten seien 220€oder 180€— es gibt hier also nur zwei mögliche zukünftige *Zustände der Welt.*

Wir suchen eine Antwort auf die Frage:

> *Was ist der "richtige" Wert für eine europäischen Call–Option auf die Aktie mit Strike–Preis 210€, die in 3 Monaten fällig wird?*

Der *Payoff* dieser Option bei Fälligkeit ist einfach (siehe auch Abbildung 4.3):

$$\text{Payoff} = \begin{cases} 10 & \text{wenn der Preis auf 220€ gestiegen ist,} \\ 0 & \text{sonst; also wenn der Preis auf 180€ gesunken ist.} \end{cases}$$

Den "richtigen" Wert der Call–Option in diesem einfachen Beispiel werden wir unter Zuhilfenahme des *No–Arbitrage–Prinzips* bestimmen. Dazu versuchen wir zunächst, ein *risikofreies Portfolio* aus diesen Aktien und Optionen zusammenzustellen.

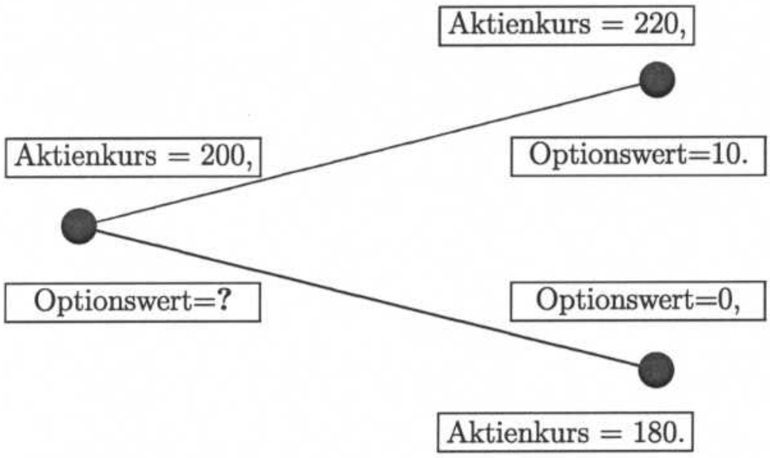
Wenn wir für die Aktie das Symbol A verwenden und für die Option das Symbol O, dann erscheint das Portfolio also als Linearkombination von A und O:

$$\alpha A + \omega O.$$

Uns interessiert ja nur der *Preis* von O, wir können das Portfolio also ruhig "normieren", indem wir durch $-\omega$ dividieren: Sei $\Delta = -\frac{\alpha}{\omega}$, dann besteht das "normierte" Portfolio aus einer *Short–Position* in einer Option O (das ist also eine *verkaufte* Option O) und aus einer *Long–Position* in Δ Aktien A:

$$\frac{\alpha A + \omega O}{-\omega} = \Delta A - O.$$

Abbildung 4.3: Payoff der Beispiel–Option im einstufigen Binomialmodell



Bemerkung 4 *Natürlich kann man Aktien "in Wirklichkeit" nur in ganzzahligen Tranchen kaufen oder verkaufen, es müßte also $\Delta \in \mathbb{Z}$ gelten: Für unsere No–Arbitrage–Argumentation nehmen wir aber der Einfachheit halber an, daß Aktien (und auch alle anderen Wirtschaftsgüter) beliebig "teilbar" seien.*

Allgemein nennen wir ein Portfolio *risikofrei*, wenn es bei jeder möglichen Situation in der Zukunft denselben Wert behält: In unserem sehr vereinfachten Beispiel ist die "Zukunft", die uns interessiert, der Zeitpunkt in 3 Monaten, und es gibt laut Annahme nur 2 mögliche Situationen, nämlich einen Kursanstieg auf 220€ oder einen Kursabfall auf 180€.

Wenn unser Portfolio also risikofrei sein soll, dann muß folgende Gleichung gelten:

$$\underbrace{220\Delta - 10}_{\text{Wert bei Kursanstieg}} = \underbrace{180\Delta,}_{\text{Wert bei Kursabfall}}$$

das ergibt $\Delta = \frac{1}{4}$.

Für $\Delta = \frac{1}{4}$ hat unser Portfolio den konstanten Wert 45 bei allen möglichen "Zuständen der Welt" in drei Monaten, es ist also risikofrei.

Gemäß dem No–Arbitrage–Prinzip muß dieses Portfolio nun denselben Wert haben wie eine entsprechende "normale" risikofreie Veranlagung, also ein fix verzinstes Guthaben, das in 3 Monaten 45 wert sein wird. Angenommen, der risikolose Zinssatz für 3 Monate wäre 12%, dann wäre das entsprechende Guthaben heute

$$\mathbf{e}^{-0.12/4} \times 45 \simeq 43.7$$

Dies ergibt folgende einfache Gleichung

$$\frac{200}{4} - f = \mathbf{e}^{-0.12/4} \times 45$$

mit der Lösung $f \simeq 6.32995$.

4.2.1.1 Moment: Was ist mit den Wahrscheinlichkeiten?!

An dieser Stelle muß ein Einwand kommen: Die "Zustände" der Welt treten doch mit gewissen Wahrscheinlichkeiten ein — aber Wahrscheinlichkeiten sind ja in unserer obigen Ableitung gar nicht vorgekommen? Angenommen, die Wahrscheinlichkeit eines Kursabfalls in unserem Beispiel wäre 1 — wer würde denn dann auch nur einen Cent für die Option zahlen? War unsere Schlußweise also nur ein "logischer Taschenspielertrick"?

Die Antwort lautet: Es sind unter No–Arbitrage–Bedingungen gar nicht beliebige Wahrscheinlichkeiten für die Kursentwicklung möglich! — Zum Beispiel: Wäre die Wahrscheinlichkeit eines Kursabfalls tatsächlich 1 (d.h., wir wissen mit Sicherheit, daß der Kurs fallen wird), dann könnten wir die Aktie jetzt verkaufen (nehmen wir mal an, *Leerverkauf* oder *Short–Selling* von Aktien sei uneingeschränkt möglich) und in drei Monaten zurückkaufen — offenbar hätten wir dadurch einen Arbitrage–Gewinn realisiert!

Es ist also zwar denkbar, daß ein Kursabfall mit Sicherheit eintreten wird (und dann wird sicher niemand unsere Beispiel–Option kaufen), aber dann wird sich der aktuelle Preise ziemlich rasch so verändern, daß die eben beschriebene Arbitrage–Möglichkeit verschwindet.

Bemerkung 5 *"In Wirklichkeit" kann man Aktien nicht so ohne weiteres "leer–verkaufen" (prinzipiell ist das in folgendem Sinne möglich: Man borgt sich die Aktie sozusagen aus — "*Wertpapierleihe *— und verpflichtet sich, sie nach Ablauf der vereinbarten Dauer wieder zurückzugeben; die ausgeborgte Aktie kann man in der Zwischenzeit verkaufen): Für unsere No–Arbitrage–Argumentation nehmen wir wieder der Einfachheit halber an, daß Short–Selling problemlos möglich ist.*

4.3 Einstufiges Binomialmodell, allgemeiner

Verallgemeinern wir die Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt: Sei S der aktuelle Aktienkurs; in einem Zeitintervall T möge der Kurs entweder um einen Faktor $u > 1$ auf $S \cdot u$ steigen oder um einen Faktor $d < 1$ auf $S \cdot d$ sinken. Dazu betrachten wir ein Derivat; dessen Payoff am Ende von T sei f_u, falls der Kurs steigt, und f_d, falls der Kurs sinkt. Wie immer interessieren wir uns für den aktuellen Wert des Derivats.

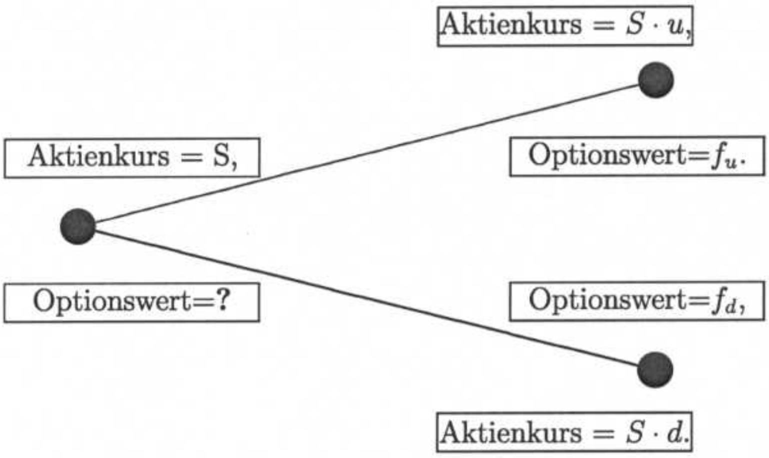
Mit demselben Ansatz wie im vorigen Abschnitt stellen wir ein risikofreies Portfolio zusammen, bestehend aus einer *Short–Position* im Derivat und einer *Long–Position* in Δ Aktien. Aus der Bedingung, daß das Portfolio risikofrei sein soll

$$\Delta S u - f_u = \Delta S d - f_d$$

ergibt sich

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S\,(u-d)}.$$

Abbildung 4.4: Payoff im einstufigen Binomialmodell



Sei r der risikofreie Zinssatz für Laufzeit T, dann ist also der Barwert des Portfolios

$$\mathbf{e}^{-r \cdot T} \times \frac{d f_u - u f_d}{(u-d)}.$$

Der sollte gleich sein dem momentanen Refinanzierungsaufwand für das Portfolio: Sei wieder f die faire Prämie für das Derivat, dann ergibt sich also aus der Gleichung

$$\mathbf{e}^{-r \cdot T} \times \frac{d f_u - u f_d}{(u-d)} = S \frac{f_u - f_d}{S\,(u-d)} - f$$

die Lösung

$$f = \frac{\left(1 - u\mathbf{e}^{-rT}\right) f_d - \left(1 - d\mathbf{e}^{-rT}\right) f_u}{d-u}.$$

Jetzt setzen wir hintersinnig

$$p := \frac{\mathbf{e}^{rT} - d}{u-d};$$

damit können wir f auch so schreiben:

$$f = \mathbf{e}^{-rT} \left(p\, f_u + (1-p) f_d\right).$$

Anders gesagt: Der Wert f des Derivats ergibt sich also gerade als der abgezinste *Erwartungswert der Auszahlungen*, wenn wir p und $(1-p)$ als Wahrscheinlichkeiten für Kursanstieg bzw. –abfall *interpretieren*!

Führen wir diesen Gedanken etwas weiter: Wenn wir diese "willkürlich" eingeführten Wahrscheinlichkeiten p und $(1-p)$ verwenden, die sich aus der obigen No–Arbitrage–Argumentation ergeben haben, dann ist der *Erwartungswert* des Aktienkurses zur Zeit T einfach

$$pSu + (1-p)Sd = \mathbf{e}^{rT} S,$$

das entspricht also genau der Aufzinsung mit dem risikofreien Zinssatz!

Aus der Betrachtung unseres so einfachen Beispiels können wir zwei Aussagen ableiten:

- Aus dem No–Arbitrage–Prinzip ergeben sich "Wahrscheinlichkeiten", die eine *risikoneutrale Welt* implizieren: "Ein Investor erwartet auch von einer riskanten Investition nicht mehr Ertrag als von einer risikofreien."
- Der Wert eines Derivats ergibt sich als der abgezinste Erwartungswert der Auszahlung in einer risikoneutralen Welt.

Diese Prinzipien liegen auch der *Black–Merton–Scholes–Formel* zugrunde.

Kapitel 5

Black–Merton–Scholes–Formel

5.1 Geometrische Brownsche Bewegung

Natürlich ist die Wirklichkeit nicht so schlicht wie im Beispiel des vorigen Abschnitt: Tatsächlich haben wir (in der Regel) keinerlei genaue Information über zukünftige Aktienkurse.

In der Praxis muß man zu (plausibel scheinenden) Modellen greifen: Das am weitesten verbreitete Modell des stochastischen (zufälligen) Verhaltens eines Aktienkurses S ist die *geometrische Brownsche Bewegung*

$$\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}z.$$

Dabei ist z ein *Wiener–Prozeß*; d.h.: $\mathrm{d}z$ ist eine *normalverteilte Zufallsvariable* mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{\mathrm{d}t}$. Die Größe σ wird in diesem Zusammenhang als Volatilität bezeichnet.

5.2 Itô–Lemma & die Differentialgleichung von Black, Merton und Scholes (etwas vereinfacht)

Uns interessiert der "richtige" Wert einer europäischen Option, oder etwas allgemeiner der Wert eines *beliebigen* Derivats: Diesen Wert setzen wir als eine Funktion vom Preis S des *underlying* und der Zeit an

$$f = f(S, t).$$

Definition 1 (Itô–Prozeß) *Sei z ein Wiener–Prozeß; seien $a(s,t)$ und $b(s,t)$ zwei Funktionen. Eine Zufallsvariable x, die der Gleichung*

$$\mathrm{d}x = a(x,t)\,\mathrm{d}t + b(x,t)\,\mathrm{d}z \qquad (5.1)$$

genügt, heißt Itô–Prozeß

Lemma 1 (Itô–Lemma) *Sei x ein* Itô–Prozeß*: Eine* beliebige *Funktion $G(x,t)$ genügt dann der Gleichung*

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\frac{b^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial x}b\,\mathrm{d}z,$$

ist also selbst wieder ein Itô–Prozeß ist. Dabei ist dz derselbe *Wiener–Prozeß wie in der Gleichung* (5.1) *für* dx.

Für den Preis des betrachteten Derivats $f(S,t)$ erhalten wir also

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\frac{\sigma^2}{2}S^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\mathrm{d}z,$$

Wenn wir das "diskretisieren" und statt den Differentialen Differenzen schreiben

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\frac{\sigma^2}{2}S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z,$$

(wobei Δf bzw. Δz Änderungen in einem kleinen Zeitintervall Δt sind), und das dem ebenfalls "diskretisierten" Prozeß für den Aktienkurs gegenüberstellen:

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta z,$$

dann können wir den Wiener–Prozeß (also den "Zufall" und damit das Risiko) "herauskürzen", indem wir folgendes Portfolio betrachten:

- Short–Position: Derivat mit Preis $f(S,t)$
- Long–Position: $\frac{\partial f}{\partial S}$ Aktien

Denn nach dem Itô–Lemma ist ja der Wiener-Prozeß für Aktienkurs und Derivat derselbe! — Genauer: Der Wert Θ dieses Portfolios ist

$$\Theta = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S.$$

Für die Änderung dieses Portfolios in einem kleinen Zeitintervall Δt ergibt sich

$$\Delta\Theta = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S.$$

Hier kommt der Wiener–Prozeß nicht mehr vor: Das Portfolio ist (in dem betrachteten Zeitintervall) risikolos und muß gemäß dem No–Arbitrage–Prinzip genau den risikolosen Zinssatz r verdienen:

$$\Delta\Theta = r\Theta\Delta t.$$

Einsetzen und Vereinfachen führt auf die *Black–Merton–Scholes–Differentialgleichung*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung hängen von den ***Randbedingungen*** ab: Z.B. lautet die Randbedingung für eine europäische Call–Option mit Strike–Preis X und Laufzeit T

$$f(S,T) = \max(S - X, 0).$$

5.3 Die Black–Merton–Scholes–Formel

Machen wir noch zwei vereinfachende Annahmen:

- Die Zinskurve ist *flach*; d.h. $r(t) = r$ (konstant).
- Der Drift μ der Geometrischen Brownschen Bewegung stimmt mit r überein.

Dann erhalten wir (nach ein bißchen Rechnen) die berühmte *Black–Merton–Scholes–Formel*, für die 1998 der Ökonomie–Nobelpreis vergeben wurde. Wir schreiben sie so hin, wie man sie zumeist in Lehrbüchern findet.

Sei S der momentane Kurs, X der Strike–Preis, T die Laufzeit bis Expiry, R der Zinssatz und σ die Volatilität:

$$d_1 = \frac{\log(S/X) + (R + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Dann erhalten wir für europäische Call–Optionen folgenden theoretischen Wert:

$$S\int_{-\infty}^{d_1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x - e^{-RT}X\int_{-\infty}^{d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x.$$

Und für europäische Put–Optionen:

$$e^{-RT}X\int_{-\infty}^{-d_2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x - S\int_{-\infty}^{-d_1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 6 *Die Annahme, daß die Zinskurve konstant ist, trifft in der Praxis natürlich kaum zu. Besonders problematisch wird eine solche Annahme klarerweise bei* Zinsoptionen *wie* Caps *oder* Floors *(das sind Zinsobergrenzen und –untergrenzen, die z.B.*

bei variabel verzinsten Anleihen vorkommen), bei denen es ja gerade um das stochastische Schwanken von Zinssätzen geht.

Die Annahme, daß der Drift des Aktienprozesses mit dem risikofreien Zinssatz übereinstimmt, ist hingegen eine — freilich sehr theoretische — Folge aus dem No–Arbitrage Prinzip, ganz analog wie im einstufigen Binomialmodell.

Die Black–Merton–Scholes wird in der Praxis jedenfalls sehr häufig verwendet, gerade weil sie so einfach ist, und ggF. modifiziert.

5.3.1 Put–Call Parity

Eine weitere Anwendung des No–Arbitrage–Prinzips führt auf einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Wert c einer Europäischen Call–Option und dem Wert p einer Europäischen Put–Option auf dasselbe Underlying S, beide mit denselben Parametern (Strikepreis X, Laufzeit T, risikofreier Zinssatz R und Volatilität σ). Dazu betrachten wir zwei Portfolios:

- A: Eine gekaufte Call–Option und einen Geldbetrag $X\mathrm{e}^{-\log(1+r(T))T}$,
- B: Eine gekaufte Put–Option und eine Einheit des Underlying.

Beide Portfolios haben zum Termin T denselben Wert

$$\max(S(T), X)$$

($S(T)$ soll natürlich den Preis von Underlying S zum Zeitpunkt T bedeuten).

Die "übliche" No–Arbitrage–Argumentation ergibt, daß beide Portfolios also auch zum momentanen Zeitpunkt denselben Wert haben müssen. Daher muß also gelten:

$$c + X\mathrm{e}^{-RT} = p + S(0). \tag{5.2}$$

Diesen einfachen Zusammenhang bezeichnet man als *Put–Call–Parity*.

5.3.2 Nichtlineare Risken

Der theoretische Wert einer Optionen ist eine *nichtlineare Funktion* in den zugrundeliegenden Parametern, man spricht auch von *nichtlinearem Risiko* (im Gegensatz etwa zu dem Wert eines Aktienportfolios, dessen Wert natürlich *linear* von den Aktienpreisen abhängt).

Die Abbildung 5.1 verdeutlicht dies graphisch.

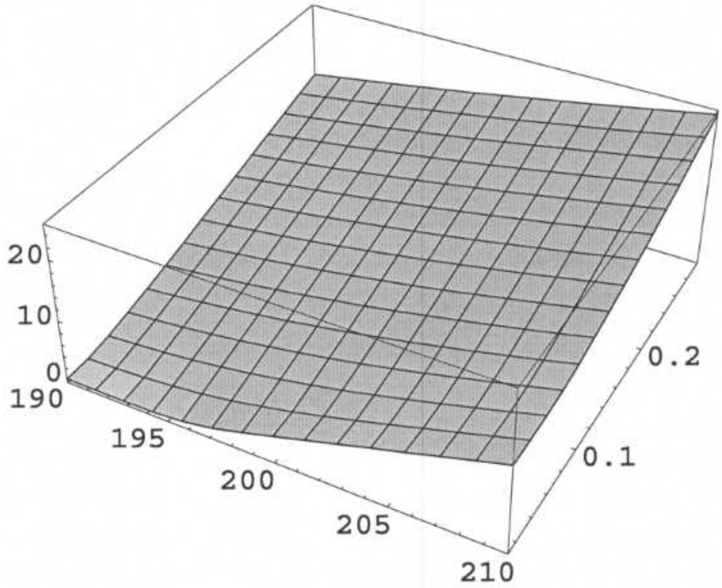


Abbildung 5.1: Wert einer Call–Option, 3D–Graphik: Strikepreis $X = 200$, $S \in (190, 210)$, $T = 0.5$, $R = 0.04$, $\sigma \in (0.01, 0.30)$

5.3.2.1 Die "griechischen Variablen"

Mathematisch gesehen, ist der (theoretische) Wert einer Option einfach eine reellwertige Funktion in mehreren Variablen. Gewisse Richtungsableitungen dieser Funktion werden in der Praxis mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Mit *Delta* wird die erste Ableitung nach dem Preis des Underlying bezeichnet: Sie ist von besonderer Bedeutung, weil damit *in erster Näherung* eine Option als lineare Funktion im Preis des Underlying dargestellt werden kann (so wie eine Position im Underlying selbst): Man spricht daher auch von einer Umrechnung in eine *delta–äquivalente Position.*

Für europäische Optionen haben wir einen geschlossenen Ausdruck, sodaß wir die Ableitung bestimmen können:

$$\Delta(\text{Call}) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}x.$$

Mit *Gamma* wird die zweite Ableitung nach dem Preis des Underlying bezeichnet:

$$\Gamma(\text{Call}) = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi T} S\sigma}.$$

Mit *Rho* wird die erste Ableitung nach dem Zinssatz R bezeichnet, mit *Theta* die erste

Ableitung nach der Zeit T und mit *Vega* (übrigens kein griechischer Buchstabe!) die Ableitung nach der Volatilität.

5.3.2.2 Exotische Optionen

Zu den "einfachen" Optionen gehören neben den europäischen auch die amerikanischen Call– oder Put–Optionen: Der Unterschied liegt darin, daß amerikanische Optionen *irgendwann* während ihrer Laufzeit ausgeübt werden können.

Darüber hinaus gibt es noch eine Fülle von sogenannten *Exotischen Optionen*; zum Beispiel:

Asian Option: Payoff abhängig vom Durchschnittspreis über eine gewisse Zeitperiode,

Barrier Option: Payoff abhängig davon, ob Preise in einer gewissen Zeitperiode eine bestimmte Schranke erreichen,

Bermudan Option: eine Art amerikanische Option, wo die Ausübung aber nur zu bestimmten Terminen möglich ist,

Chooser Option: eine Option, bei der man im nachhinein wählen kann, ob sie ein Call oder Put ist.

Nicht für alle diese Produkte gibt es geschlossene Formeln: Bei der Bewertung setzt man dann numerische Verfahren ein (z.B. *Monte–Carlo–Simulation*), ebenso bei der Berechnung der "Griechen".